13-Д. Эллипсоид бетінде бас геодезиялық есептеулерді шешу.

Эллипсоид үстіндегі әрбір нүктеге нормаль орнатуға болады. Осы нормаль арқылы әртүрлі бағыттарға сан жетпес көп жазықтық жүргізуге болады. Әрбір нормаль жазықтық эллипсоид бетін қисық сызық бойынша қияды, ол ***нормальды қиылысуы*** деп аталады. Әрбір нормальды қиылысудың өз қисықтығы болады. Олардың ішінен екі нормальды қиылысуды көрсетуге болады, оның бірінде ең үлкен қисық бар, басқасында ең кіші қисық бар. Бұл екі қиылысу ***бас нормальды қиылысу*** деп, ал олардың қисықтық радиусы – ***бас радиус қисықтығы*** деп аталады.

Минималды қисық радиусы бар, бас нормальды қиылысудың меридионалды қиылысу болады, ол эллипсиод бетінен және оның екі полюсінен бір нүкте арқылы өтеді. Оның радиус қисықтығы М-мен белгіленеді.

Екінші бас нормаль қиылысуы болып, меридианға перпендикуляр қиылысу болады. Бұл қиылысу – бірінші вертикал деп аталады. Бірінші – вертикалдың радиус қисықтығы N-мен белгіленеді.

Меридианның радиус қисықтығы және бірінші вертикал келесі формуламен есептеледі:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 B)^3}}; \qquad (91)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}. \qquad (92)$$

Эллипсоид үстіндегі барлық нүктелерде болады, бірақ N>M полюсінде болмайды. Экваторда ($B=0^0$) бұдан) $M= a(1-e^2)$, $N=a$, онда полюсте ($B=90^0$) болғанда, M=N=c. Полюсте барлық нормальдық қиылысулар меридиан түрінде болады. Осыған байланысты ***с полярлық радиустың қисықтығы*** деп аталады.

$$c = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}. \qquad (93)$$

Геодезияда, картографияда және топографияда практикалық есептерді шешкенде, сондай-ақ инженерлі есептеулерде орта қисық радиусы R қолданылады, ол берілген нүктеде орташа геометриялық бас қисық радиусқа тең:

$$R = \sqrt{MN}. \qquad (94)$$

Бас радиус қисықтығы М және N сфероидалық геодезияның негізгі элементтері болады, яғни оларсыз эллипсоид элементтерін есептеу мүмкін емес. М бойынша меридиан доғасының ұзындығын, ал N бойынша параллель доғасының ұзындығын, бойлық айрмашылығын, азимуттарды және меридиандардың жақындастығын есептейді.

Меридиан доғасының ұзындығын есептеу. SM меридиан доғасының ұзындығы B_1 және B_2 ендік нүктелері арасында эллептикалық интеграл шешімін де анықталады, ол мына түрде болады

$$S_M = \int_{B_1}^{B_2} M dB, \qquad (95)$$

мұнда dB – доға бойынан геодезиялық ендіктің қосымша өсірілуі;

M – меридиан радиус қисығының есептелетін доға бойының мәні.

Доға ұзындығы 1000 км болса, SM есептеуін келесі формуламен орындайды:

$$S_M = \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''}(M_1 + M_{ср.} + M_2), \qquad (96)$$

мұндағы B_1 және B_2 –меридиан соңының ендігі;

M_1, M_2 және $M_{ср}$. – ендіктегі нүктелердің меридианының радиус қисығының мәні: B_1, B_2 және $B_{орта} = (B_1 + B_2)/2$.

Параллельдер доғасының ұзындығын есептеу.

Параллельдердің доға ұзындығы айналымның бөлік, ұзындығы болып табылады сондықтан ол берілген параллельдің бойлық арақашықтықтағы доға нүктелерінің радиус туындысы болады

$$r = N\cos B; \quad S_n = \frac{l''}{\rho''}NCosB = \frac{l''\,CosB}{(2)}, \quad l'' = (L_2 - L_1)''. \qquad (97)$$

Бақылау үшін параллельдер доға ұзындығын есептегенде Y_1, Y_2 , доға ұзындығының айырмашылығы деп анықтау керек ол меридианнан L1=30°″ бойлықта есептеледі

$$S_n = Y_2 - Y_1; \qquad (98)$$

немесе кестені формула бойынша қолданады:

$$S_n = b_1 l'', \qquad 99)$$

мұнда – b_1 секундтық параллель доға ұзындығының мәні, B ендік мәні бойынша кестеден алынады – 10^{-4} есе үлкейтілген, сондықтан 10^{-4} есе кішірейту керек.

Меридиан ұзындығы 1°-та метрлік өлшеммен Қазақстанның орта ендігінде 111 км тең, доғаның 1″-ді -31м, параллельдің 1″ді – 20м.

Трапеция алаңының түсірісін және олардың өлшемін есептеу.

Жер шары эллипсоид бетінде карта парағы немесе түсіріс трапециясы меридиандар сызығымен және параллелдермен шектеледі. Бұл сызықтар трапеция қабырғалары болып келеді, сондықтан трапеция қабырғаларының шын өлшемі меридиан мен параллельдің доға ұзындығының формулалары бойынша есептеледі.

Трапецияның солтүстік және оңтүстік рамкалары a_1 және a_2, B_1 және B_2, ендікті параллель доғалары болады, ол шығыс және батыс рамкалары – *c* меридиан доғасы, *d*- трапецияның диагоналы болады.

Трапецияның нақты өлшемін алу үшін жоғарыда айтылған доғаларды масштабтың бөліміне бөліп ***m*** және 100-ге көбейту керек, сантиметрмен алу үшін:

$$a_1 = \frac{100}{m}\frac{N_1}{\rho''}CosB_1 l'' = \frac{100}{m} l'' \frac{CosB_1}{(2)};$$
$$a_2 = \frac{100}{m}\frac{N_2}{\rho''}CosB_2 l'' = \frac{100}{m} l'' \frac{CosB_2}{(2)};$$
$$c = \frac{100}{m}\frac{M_m}{\rho''}(B_2 - B_1)'' = \frac{100}{m}\frac{\Delta B''}{(1)_m};$$
$$d = \sqrt{a_1 a_2 + c^2}. \qquad (100)$$

Формулалар түсіріс жазықтықта тура болса, трапециясының өлшемін анықтауға мүмкіндік береді,

Теорияда, егер үлкен масштабты (масштаб 1:10000) түсіріс, трапециясы 6 градус зонасында орналасса, онда оның қабырға ұзындығы Гаусс проекциясында бұзылады, ол графикалық дәлдікті жоғарылытады.

Сызықты бұзылу мына формула бойынша анықталады

$$m - 1 = \frac{l^2}{2\rho^2} Cos^2 B_m. \qquad (101)$$

1:1000 000 – 1:25 000 масштабты түсірістер 6^0 зонада, орындалады, одан ірі масштабты түсірулер 3^0 зонада орындалады.

Түсіріс трапециясының аудан элементі меридиандар және параллельдер доға дифференциалдарының туындысына тең, ол сонымен шектелген

dP=MNCosBdBdl. (102)

Түсіріс трапеция ауданы мына формуламен анықталады.

P=2Kl^0 (I-II-III) (103)

$$K = \frac{\pi b^2}{180^\circ} = 705282.85; \quad I = A' Sin\frac{1}{2}\Delta BCosB_m;$$
$$II = B' Sin\frac{3}{2}\Delta BCos3B_m; \; III = C'\frac{5}{2}\Delta BCos5B_m;$$

A'=1.0033635

B'=0.0011240.

C'=0.0000017

Берілген формула бойынша аудан 0.001 км^2 дәлдікте есептеледі.

Өзара кері нормальды қиылысу.

Эллипсоид айналу бетінен екі А және В нүктелерін алайық, олардың ендіктері – В1 және В2. А және В нүктелерінде эллипсоид бетінен $n_а$ және $n_в$ нормальдарын жүргіземіз. А нүктесінен және жазықтық нормалынан жүргіземіз.

А$n_а$В және В$n_в$А нормальды жазықтықтары өзара сәйкес келмейді, өйткені $n_а$ және $n_в$ кеңістікті қиылысу түзуі болып келеді. Олар эллипсоид бетінде қиылысқанда АаВ қисығын береді. Бұдан АаВ қисығы А нүктесі үшін түзу нормальды қиылысуы болады, ал В нүктесі үшін нормальды қиылысу керісінше болады, ВвА қисығы В нүктесі үшін түзу қиылысуы болады, және А нүктесі үшін кері болады. АаВ және ВвА нормальды қиылысулар *өзара кері нормальды қиылысулар* деп аталады.

Өзара кері нормальды қиылысулардың сәйкес келмеуін *екеулік нормальды қиылысу* деп аталады. Өзара–кері нормальды қиылысу екеулігі, оларды практикада қолданғанда қиыншылық туғызады. Мысалы, триангуляцияның өлшенген үшбұрыш бұрыштары эллипсоид бетінде нормальды жазықтықтармен жобаланады, осыдан кейін үшбұрыш контуры өзара нормаль қиылысудың екеулігінен тұйықталмаған болады. Бұл анықталмаушылықты болдырмау үшін эллипсоид бетіндегі А және В нүктелерін ерекше қисықтармен қосады, оларды *геодезиялық сызық* деп аталады.

Геодезиялық сызық эллипсоид бетінде нүктелерді қысқа арақашықтық бойынша қосады. Геодезиялық сызықтың жазықтықтағы аналогы түзу сызық болып келеді.

Эллипсоид айналуындағы геодезиялық сызықтарының кез-келген нүктесінде параллель радиус және геодезиялық сызықтың синус азимуттары жүргізілген–өлшемдері тұрақты.

$$\boldsymbol{r \sin A = const = c} \qquad (104)$$

мұнда ***r***- параллель радиусы; $\boldsymbol{r = N\cos B}$.

(104)-формула *Клеро теңдігі* деп аталады

Эллипсоид бетіндегі геодезиялық сызық (азимуттар 90^0 немесе 270^0 жақын емес) өзара кері нормальды қиылысулар арасында бұрышты 1:2 бөледі және осы нүктеде түзу нормальды қиылысуға жақын орналасады.

Егер геодезиялық сызық азимуты $A_{12}= 90^0$ немесе 180^0 болса, яғни А және нүктелері бір меридианда жатса, тура және кері нормальды қиылысулар және геодезиялық сызықтар қосылады. 90^0 және 270^0 жақын азимуттарда (А және В нүктелері бір параллельде жатады), тура және кері қиылысулар сәйкес келеді.

Геодезиялық сызықтардан жасалған эллипсоид бетіндегі үшбұрыш *сфероидтық үшбұрыш* деп аталады.

Сфералық үшбұрышты шешу кезінде үшбұрыш қабырғаларының ұзындығын оларды бұрыштарға ауыстырмай-ақ сызықтық өлшемдермен алуға мүмкіндік беретін екі әдісті қолданады. Мұндай әдістерге *Лежандр теоремасы бойынша үшбұрыштарды шешу* және *аддитамент әдістері* жатады.

Лежандр теоремасы бойынша кіші сфералық үшбұрыштарды шешу.

Егер референц-эллипсоидтағы үшбұрыштардың қабырғалары 250км аспайтын болса, онда мұндай үшбұрышты Лежандр теоремасын – жазық тригонометрия формулаларын қолданып, оларды сфералық үшбұрыштар деп қабылдау арқылы шығаруға болады. 1887ж. Лежандр мынадай теореманы дәлелді:

Егер жазық және сфералық үшбұрыштар қабырғалары өзара тең болса, онда сәйкес келетін жазық үшбұрыш бұрыштары сфералық үшбұрыш бұрыштарына тең, олар сфералық артықшылықтың үштен бір бөлігіне қысқартылған.

Сфералық артықшылық $\boldsymbol{\varepsilon}$ деп сфералық үшбұрыш бұрыштарының және жазық үшбұрыштардың қосындысының айрымын айтады

$$\boldsymbol{\varepsilon = (A+B+C)180^0} \qquad (105)$$

Сфералық үшбұрыштарды шешу жазық үшбұрыштарды шешуге әкеледі, сфералық үшбұрыштың бұрыштарын сәйкес келетін 1/3 сфералық артықшылық түзетуімен жөндейді.

Сфералық артықшылық биіктігі үшбұрыш ауданына және сфера радиусына тәуелді, яғни

$$\varepsilon'' = \frac{P}{R^2}\rho''; \qquad (106)$$

мұнда Р- үшбұрыш ауданы;

R- сфера радиусы.

Үшбұрыштың сфералық артықшылығы мына формула бойынша есептелінеді:

$$\varepsilon = \frac{bcSinA_1}{2R^2}\rho'' = \frac{acSinB_1}{2R^2} = \frac{abSinC_1}{2R^2}. \qquad (107)$$

Үшбұрыштың сфералық артықшылығы мына формула бойынша есептелінеді *ρ/(2R²)=f*, биіктігін еңгізіп, мынаны аламыз:

$\boldsymbol{\varepsilon = fbcSinA_1 = facSinB_1 = fabSinC_1}$ немесе

$$\varepsilon = \frac{fb^2 SinA_1 SinC_1}{SinB_1} = f\frac{a^2 SinB_1 SinC_1}{SinA_1} = f\frac{c^2 SinA_1 SinB_1}{SinC_1}$$

егер бір қабырға және үшбұрыштың барлық бұрыштары белгілі болса, сфералық артықшылықты есептегенде қабырғалар км-мен беріледі.

$$A_1 = A - \frac{\varepsilon}{3}; B_1 = B - \frac{\varepsilon}{3}; C_1 = C - \frac{\varepsilon}{3}.$$

$\boldsymbol{A_1, B_2, C_3}$ бұрыштарды жазық келтірілген бұрыштар деп аталады, $\boldsymbol{f}$ мәні ТМД территориясында 0,00253 тұрақтылыққа тең.

Келтірілген бұрыштарды алып, әрі қарай үшбұрыштарды жазық ретінде синустар теоремасы бойынша есептейді. Осы жағдайда, сфералық үшбұрышты Лежандр теоремасын қолданып, келесі операциялармен есептейді.

1) формулалар бойынша үшбұрыштардың сфералық артықшылығын есептейді;

2) жазық үшбұрыштың келіспеушілігін есептейді

$$\boldsymbol{\omega = (A+B+C) - \varepsilon - 180^0} \qquad (109)$$

және оны шекті келіспеушілікпен салыстырады:

$$w_{доп.} = 2.5 m_\beta \sqrt{3}. \qquad (`110)$$

3) егер үшбұрыштан шыққан келіспеушілік (109) шартты орындаса, онда бақылау нәтижелері сапалы. Бұл жағдайда алынған келіспеушілік әр үшбұрыштың бұрыштарына тең етіп бөлінеді, одан теңестірілген үшбұрыштың сфералық бұрыштары алынады:

$$A = A_{изм.} - \frac{w}{3}, B = B_{изм} - \frac{w}{3}, C = C_{изм.} - \frac{w}{3}. \qquad (111)$$

4) жазық үшбұрыштың бұрыштарын есептейміз:

$$A_1 = A - \frac{\varepsilon}{3}, B_1 = B - \frac{\varepsilon}{3}, C_1 = C - \frac{w}{3}. \qquad (112)$$

5) бастапқы сфералық қабырғаны және жазық үшбұрыш бұрыштарын қолдана отырып, үшбұрыштарды синус теоремасымен жазық тригонометрия формулалары бойынша есептейді. Егер SAB берілген қабырғалар болса, онда

$$S'_{BC} = S_{AB}\frac{SinA_1}{SinC_1}, S'_{AC} = S_{AB}\frac{SinB_1}{SinC_1} \qquad (113)$$

Аддитамент әдісімен сфералық үшбұрыштарды шешу

Егер сфералық үшбұрыш қабырғалары 100км аспаса, онда оларды жазық тригонометрияда теңестірілген сфералық бұрыштарды және берілген сфералық қабырғаларды қолдана отырып есептеу мүмкіндігі туындайды, ол жазықтыққа аддитаменттің кіші түзетуі арқылы келтірілген.

Бұл әдісті 1820 ж неміс ғалымы Зельднер ұсынған.

Сфералық тригонометрия формулалары үшбұрыштар қабырғаларының берілген қабырғалары және өлшенген бұрыштар үшін есептеледі:

$$Sin\frac{a}{R}/SinA = Sin\frac{b}{R}/SinB = Sin\frac{c}{R}/SinC. \qquad (114)$$

a қабырғасы белгілі және базисті қабырға болады. Үшбұрышты шеше отырып, ***b*** *қабырғасын* анықтаймыз.

$$Sin\frac{b}{R} = \frac{Sin\frac{a}{R}SinB}{SinA} \qquad (115)$$

Sin-ты бір қатарға орнатып және екі мүшемен қатыстырып орналыстырғаннан мынаны аламыз:

$$\frac{b}{R}\left(1-\frac{b^3}{6R^2}\right) = \frac{1}{R}\left(a-\frac{a^3}{6R^2}\right)\frac{SinB}{SinA} \qquad (116)$$

Белгілеулер енгіземіз: $A_a = \frac{a^3}{6R^2}, A_b = \frac{b^3}{6R^2}, A_c = \frac{c}{6R^2}.$

A биіктігі *қабырға аддитаменті* деп аталады. Жазық үшбұрыш қабырғалары былай анықталады:

$$b' = b - A_b;$$
$$a' = a - A_a; \qquad b' = \frac{a'SinB}{SinA}, c' = \frac{a'SinC}{SinA}$$
$$c' = c - A_c.$$

Сфералық үшбұрыш қабырғалары:

$$\boldsymbol{b = b' + A_b}$$
$$\boldsymbol{c = c' + A_c}, \qquad (118)$$

Бақылау үшін мынаны анықтаймыз:

$$\boldsymbol{a = a' + A_a}.$$

Аддитамент әдісі бойынша сфералық үшбұрыштарды шешу үшін келесі операцияларды орындаймыз:

1) үшбұрыш қабырғасындағы ***a*** берілгенге қабылдап, осы $\boldsymbol{A_a}$ қабырғасының аддитаментін есептеп және бастапқы қабырғаны белгілі бір көмекші бетіне келтіріп оны алып тастау;

2) келтірілген бастапқы қабырғалар мен сфералық бұрыштар арқылы үшбұрыштың қалған қабырғалары есептеледі. Алдын ала үшбұрыш келіспеушілігін әр бұрышқа теңдеп бөлінеді.

3) әр келтірілген қабырға үшін аддитамент есептеледі, оны келтірілген қабырғалары арқылы аламыз.

Үшбұрыштар қабырғалары 100 км болса, аддитамент мына формулалармен есептеледі:

$$A_a = ka^3, \qquad A_b = kb^3, \qquad A_c = kc^3 \qquad (119)$$

мұнда k = 1/(6R^2) = 409^{-8} қабырғалар км-де алынады.

Лежандр әдісі және аддитамент әдістері кіші сфералық үшбұрыштарды шешкенде өте тиімді болып табылады.